**25.Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Случай различных комплексных корней характеристическ0ого уравнения.**

***Линейное однородное дифференциальное уравнение*n*-го порядка с постоянными коэффициентами***записывается в виде

где  − постоянные числа, которые могут быть действительными или комплексными.

Используя [линейный дифференциальный оператор](http://www.math24.ru/%D0%B4%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B5-%D0%BE%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D1%8B.html) L(D), данное уравнение можно представить в виде

,

где

*.*

Для каждого дифференциального оператора с постоянными коэффициентами можно ввести *характеристический многочлен*

Алгебраическое уравнение

называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения.   
  
Согласно основной теореме алгебры, многочлен степени  имеет ровно  корней с учетом их кратности. При этом корни уравнения могут быть как действительными, так и комплексными (даже если все коэффициенты   действительные).   
  
Рассмотрим более детально различные случаи корней характеристического уравнения и соответствующие формулы общего решения дифференциального уравнения.

***Случай 1. Корни характеристического уравнения комплексные и различные***

Если коэффициенты дифференциального уравнения являются действительными числами, то комплексные корни характеристического уравнения будут представляться в виде пар комплексно-сопряженных чисел:

, ,…

В этом случае (применяя формулы Эйлера) общее решение записывается как

***Случай 2. Корни характеристического уравнения комплексные и кратные***

Здесь каждой паре комплексно-сопряженных корней  кратности  соответствует 2 частных решений

Тогда часть общего решения дифференциального уравнения, соответствующая данной паре комплексно-сопряженных корней, конструируется следующим образом:

В общем случае, когда характеристическое уравнение имеет как действительные, так и комплексные корни произвольной кратности, общее решение строится в виде суммы рассмотренных выше решений вида 1−4.

**26**. **Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Случай кратных корней характеристического уравнения.**

***Линейное однородное дифференциальное уравнение*n*-го порядка с постоянными коэффициентами***записывается в виде

где  − постоянные числа, которые могут быть действительными или комплексными.   
  
Используя [линейный дифференциальный оператор](http://www.math24.ru/%D0%B4%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B5-%D0%BE%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D1%8B.html) L(D), данное уравнение можно представить в виде

,

где

*.*

Для каждого дифференциального оператора с постоянными коэффициентами можно ввести *характеристический многочлен*

Алгебраическое уравнение

называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения.   
  
Согласно основной теореме алгебры, многочлен степени  имеет ровно  корней с учетом их кратности. При этом корни уравнения могут быть как действительными, так и комплексными (даже если все коэффициенты   действительные).

***Случай 1. Все корни характеристического уравнения действительные и различные***

Предположим, что характеристическое уравнение  имеет n корней . В этом случае общее решение дифференциального уравнения записывается в простом виде:

где  − постоянные, зависящие от начальных условий.

***Случай 2. Корни характеристического уравнения действительные и кратные***

Пусть характеристическое уравнение    степени n имеет m корней  , кратность которых, соответственно, равна  Ясно, что выполняется условие

.

Тогда общее решение однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид:

Видно, что в формуле общего решения каждому корню  кратности  соответствует ровно  членов, которые образуются умножением x в определенной степени на экспоненциальную функцию  Степень  изменяется в интервале от 0 до −1, где  − кратность корня .

**27. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка. Свойства решений, структура общего решения.**

**Линейное ДУ n-го порядка** имеет вид

http://lib.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_dict/files.book&file=dict_64.files/image1.gif(1)

Где - заданные функции.

Если  и все коэффициенты   и правая часть f(x)-  — непрерывные функции, то при любых начальных условиях решение уравнения (1) существует и единственно.

Если ≡0,  [линейное уравнение](http://sernam.ru/book_e_math.php?id=64) (1) называется *однородным,* в противном случае — *неоднородным*. Для уравнения (1) часто используется краткое обозначение:

**Частные решения.** Каждое линейное однородное ДУ порядка имеет ровно*n* линейно независимых частных решений  т.е.  таких решений, что ни одно из них не может быть выражено в виде линейной комбинации остальных (фундаментальная система решений). Заметим, что в случае [однородного уравнения](http://sernam.ru/lect_math3.php?id=12) второго порядка линейная независимость частных решений   равносильна условию

Пример 1. [Линейное однородное уравнение](http://edu.sernam.ru/book_p_math2.php?id=22)  имеет два частных решения   которые линейно независимы, поскольку их отношение не является постоянной.

**Теорема о структуре общего решения линейного однородного**[**дифференциального уравнения**](http://sernam.ru/book_e_math.php?id=40)**.** Общее решение линейного однородного ДУ n-го порядка  представляет собой линейную комбинацию его*n* линейно независимых частных решений:

http://lib.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_dict/files.book&file=dict_64.files/image3.gif

где  — произвольные постоянные.

Пример 2. Найти общее решение ДУ

Решение. Общее решение этого [линейного однородного уравнения](http://edu.sernam.ru/book_p_math2.php?id=22) является линейной комбинацией его частных решений, приведенных в примере 1. Поэтому

**Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного**[**дифференциального уравнения**](http://sernam.ru/book_e_math.php?id=40)**.** Общее решение линейного неоднородного ДУ n-го порядка  равно сумме общего решения  соответствующего [однородного уравнения](http://sernam.ru/lect_math3.php?id=12)   и какого-нибудь частного решения   данного неоднородного уравнения:

http://lib.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_dict/files.book&file=dict_64.files/image4.gif

Пример 3. Найти общее решение ДУ

Решение. Общее решение соответствующего [линейного однородного уравнения](http://edu.sernam.ru/book_p_math2.php?id=22) приведено в примере 2. В качестве частного решения неоднородного ДУ можно взять функцию  Поэтому общее решение данного линейного неоднородного уравнения имеет вид